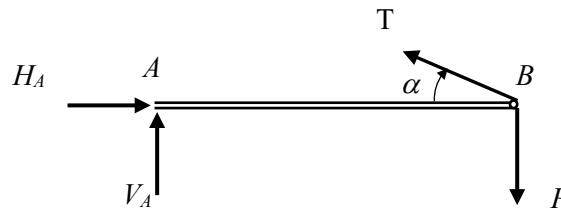


Problème1

1. Schéma et équilibre statique

$$N_C = \frac{\pi^2 EI}{\ell_0^2}$$

avec $\ell_0 = \ell$



Equilibre des forces et des moments de forces

$$\sum F_V : H_A = T \cos \alpha$$

$$\sum M_A : P \ell = T \ell \sin \alpha$$

Et donc

$$H_A = \frac{P}{\sin \alpha} \cos \alpha = \frac{P}{\tan \alpha} = 10'392 \text{ N}$$

2. Calcul de la charge critique

Avec un coefficient de sécurité de 2, nous avons, si la formule d'Euler est applicable :

$$n = \frac{N_C}{N}$$

$$N_C = 2N = \frac{2P}{\tan \alpha} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = 20'785 \text{ N}$$

3. Moment d'inertie et diamètre

$$I = \frac{\pi}{64} (D_e^4 - D_i^4) = \frac{\pi}{64} D_e^4 (1 - 0,8^4) = \frac{2P \ell^2}{\pi^2 E \tan \alpha} = 40,11 \cdot 10^{-9} \text{ m}^4$$

Et donc

$$D_e^4 = \frac{64I}{\pi(1 - 0,8^4)} = \frac{128P \ell^2}{\pi^3(1 - 0,8^4)E \tan \alpha} = 1,384 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

$$D_e = 34,30 \text{ mm}$$

$$D_i = 27,44 \text{ mm}$$

4. Vérification du domaine de validité

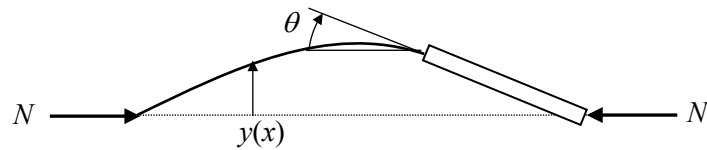
$$F = \frac{\pi}{4} (D_e^2 - D_i^2) = \frac{\pi}{4} D_e^2 (1 - 0,8^2) = 0,3326 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$i = \sqrt{I/F} = 0,01099$$

$$\lambda = \frac{\ell}{i} = 182 > \lambda_P$$

Problème 2

1. Schéma



2. Moment de flexion et déformée

$$0 \leq x \leq \alpha l$$

$$M(x) = Ny(x)$$

Ainsi l'équation différentielle de la déformée s'écrit :

$$y'' = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{N}{EI}y$$

On cherche une solution à l'équation différentielle $y'' + K^2y = 0$ avec $K^2 = N/EI$

$$y = A \sin Bx + C \cos Dx$$

$$y' = AB \cos Bx - CD \sin Dx$$

$$y'' = -AB^2 \sin Bx - CD^2 \cos Dx = -\frac{N}{EI} [A \sin Bx + C \cos Dx]$$

On a donc

$$AB^2 = AK^2 \quad \text{et} \quad CD^2 = CK^2$$

$$B = D = K$$

3. Conditions aux limites

$$y(x=0) = 0 = C$$

$$y'(x=\alpha l) = -\theta = \frac{y(\alpha l)}{(1-\alpha)l}$$

La seconde condition aux limites permet d'écrire

$$y' = AK \cos Kx = \frac{y(\alpha l)}{(1-\alpha)l} = \frac{A \sin(K\alpha l)}{(1-\alpha)l}$$

Et donc finalement

$$\tan(\alpha K l) + (1-\alpha)K l = 0$$

4. Charge critique (le paramètre α est tel que $0 < \alpha \leq 1$)

Pour le cas particulier $\alpha = 1$, on retrouve le résultat élémentaire $K\ell = n\pi$, d'où la charge critique

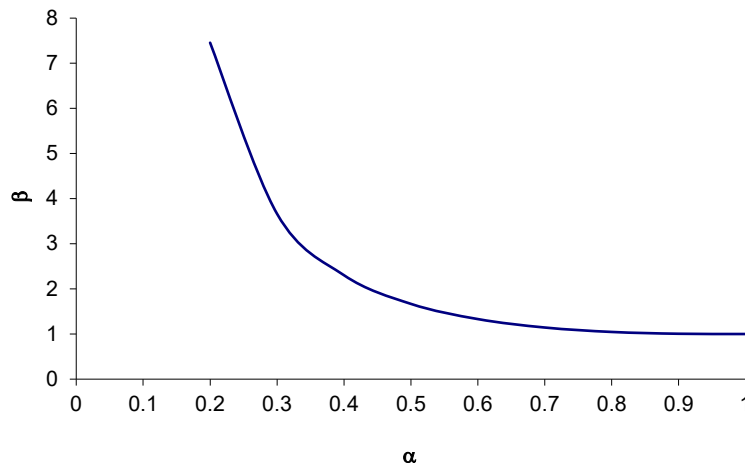
$$N_C = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = N_{C0}$$

Lorsque $\alpha \neq 1$, la résolution numérique de l'équation caractéristique permet de calculer la charge critique N_C que nous exprimerons sous la forme :

$$N_C = \beta N_{C0}$$

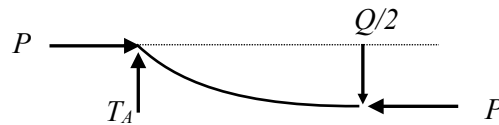
Le domaine de validité de la courbe de la fig1. est limité vers la gauche par la limite de proportionnalité (domaine d'Euler). Cette limite s'exprime par $N_C \leq R_p F$ ou $N_C \leq N_{CP}$, ce qui donne pour β :

$$\beta \leq \frac{R_p \ell^2 F}{\pi^2 EI} = \frac{\lambda_0^2 R_p}{\pi^2 E}$$



Problème 3

1. Schéma et équilibre statique



Vu la symétrie, on peut ne considérer que la moitié du système

$$T_A = \frac{Q}{2} = T_C$$

2. Calcul du moment de flexion

$$M(x) = \frac{Q}{2}x + Py$$

3. Expression de la déformée

$$y'' = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{Py}{EI} - \frac{Qx}{2EI}$$

Dont l'intégrale générale est :

$$y = A \cos \omega x + B \sin \omega x - \frac{Qx}{2P} \quad \text{avec} \quad \omega^2 = \frac{P}{EI}$$

Conditions aux limites

$$y(x=0) = 0 \quad \rightarrow A = 0$$

$$y'(x = \ell/2) = -\omega A \sin \omega \frac{\ell}{2} + \omega B \cos \omega \frac{\ell}{2} - \frac{QP}{2} \quad \rightarrow B = \frac{Q}{2P\omega \cos \omega \frac{\ell}{2}}$$

Finalement on exprime la déformée

$$y = \frac{Q}{2P\omega} \left(\frac{\sin \omega x}{\cos \omega \frac{\ell}{2}} - \omega x \right)$$

4. Calcul de la charge critique P_C

La charge critique correspond à $y \rightarrow \infty$ et donc pour $\cos \omega \frac{\ell}{2} = 0$

D'où l'on peut exprimer
$$\omega \frac{\ell}{2} = \frac{\pi}{2} = \frac{\ell}{2} \sqrt{\frac{P_C}{EI}}$$

On sait donc que Q est sans influence sur la charge critique. En effet, la charge critique correspond à la valeur propre de l'équation caractéristique, or Q n'intervient qu'au second membre. Par contre, la contrainte dangereuse est influencée par Q .